XXXIV. *De Problemate quodam Algebraico, deque evolutione mechanicæ cujuſdam Curvæ inter infinitas hypermechanicas, quæ determinatæ æquationi ſatisfaciunt. Auctore* Pio Fantoni, *Mathematico* Bononienſi. *Communicated by Sir* Horace Mann, *His Majeſty's Envoy at* Florence.

Read June 25, 1767.

QUI in computationibus analyticis verſari ſolet, animum non modo in ea præſidia ſolet intendere, quibus problemata deducuntur ad æquationes, ſed maximam ubique exoptat concinnitatem, atque elegantiam, ut univerſi operis apparatus, conſtructio, utilitaſque commendentur. Quantum vero elaborationis, ac ſtudii plerumque ad hæc ſingula requiratur, ii probe intelligunt excellentiſſimi viri, qui ſe jamdudum algebræ dediderunt. Veruntamen fateri ultro debent, non mediocrem aliquando utilitatem obtineri poſſe ex hujuſce potius, quam illius methodi applicatione. Fit enim non raro, ut cum quæſtionem aliquam ſubtili licet ingenio verſatus fueris, alia tandem methodus meliori auſpicio ſuſcepta, illico tibi elargiatur clariorem uberioremque ejuſdem quæſtionis ſolutionem, ex qua multa præterea obtineas quæ admireris. Id vero mihi in

in ſublimi problêmate quodam algebraico, an bene feliciterque contigerit, veſtro judicio, Academici ſapientiſſimi, quod maximi facio, decernendum relinquo. Si interea, ut exoro, hanc meam elucubrationem ſumma humanitate veſtra excipietis, eâ deinceps utar in aliis non contemnendis rebus tum phyſicis, tum mechanicis, ut veſtra ſapientia duce, facilius ad quaſdam naturæ adhuc reconditas leges pervenire poſſim.

Nunc porro velim intelligatis, me in hoc argumento analytico, de quo loquor, tria maxime præſtitiſſe. Primum enim curvam quandam exploravimus ſuis coordinatis ad axem, & licet lectiſſimis præſidiis uſi fuerimus in ſeparatione indeterminatarum, licet inveſtigationem noſtram ſatis ultro promotam conſpexerimus, in æquationem tandem, ut dicunt, hypermechanicam irrumpere opus fuit, in eam videlicet, quæ expoſcit mechanicam quadraturam curvarum exigentium primo mechanicam circuli quadraturam. Ex hac autem fere inextricabili conſtructione non ea certe conſectaria, quæ in votis erant, erui elegantiſſime potuiſſent. Quare difficultate rei veluti commoti, ſatis opportune curvam noſtram ab axe ad focum deduximus, atque hoc modo univerſum illud opus, cujus dilucide enodandi ſpem omnem antea demiſimus, eò tandem feliciter perduximus, ut ipſum recte eſſet, nobiſque plene ſatisfaceret. At vero in hac ſecunda problematis mei parte dum contendo, dum illam conſtanti animo defugio hypermechanicam conſtructionem, atque ad pure mechanicam propero, invenio tandem in infinita curvarum hypermechanicarum familia, quæ peculiari

cuidam

cuidam æquationi ſatisfaciunt, unam præterea curvam opportune abſcondi, quæ a ſimplici quadratura circuli dependeat, quæque nobis conſtructionem plenam aptioremque impertiat, ſitque ſemper in poteſtate, dummodo y dentur per x, quanquam ſeparari indeterminatæ nullo pacto ab invicem poſſint. Qui rem hanc altius perſcrutari curabunt, non difficili labore intelligent in æquationibus naturæ hujus ſemper includi curvam ſimilem noſtræ ſimili modo detegendam. Cujus ſane methodi cognitio an utilitati & commodo Analyſtis futura ſit in hujuſmodi operoſiſſimis quæſtionibus ſolvendis, non eſt cur diuiturniori oratione vobis exponam. Properamus itaque ad rem noſtram.

PROBLEMA.

TAB. XIV. FIGURA PRIMA.

Invenire curvam IMm ea proprietate donatam, ut ex dato puncto A ductâ in tangentem MT perpendiculari AG. intercepta MG ſit ſemper æqualis conſtanti a.

Ex puncto contactus M in axem AP duc perpendicularem MP, eique parallelam infinite proximam mp, tum excita ex puncto M rectam Ms parallelam Pp, dicque $AP = x$, $Pp = Ms = dx$, $PM = y$, $ms = dy$, & $MG = a$. Erit $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. $PT = \frac{ydx}{dy}$. $TA = \frac{ydx - xdy}{dy}$, $TM = \frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ideoque $GT = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} - a$.

Fig. 1.

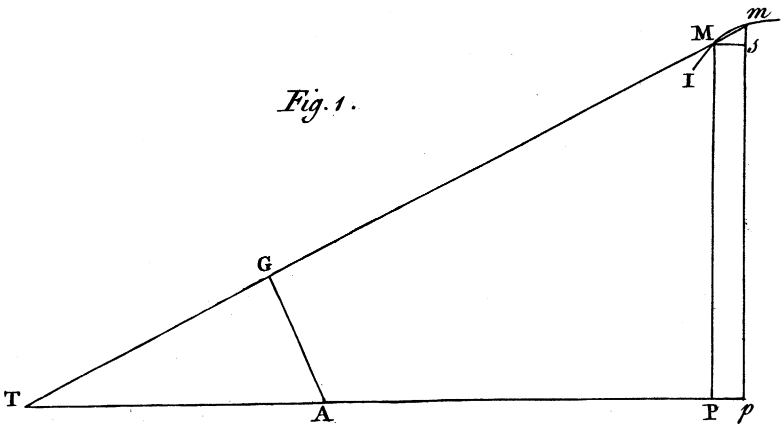


Fig. 2

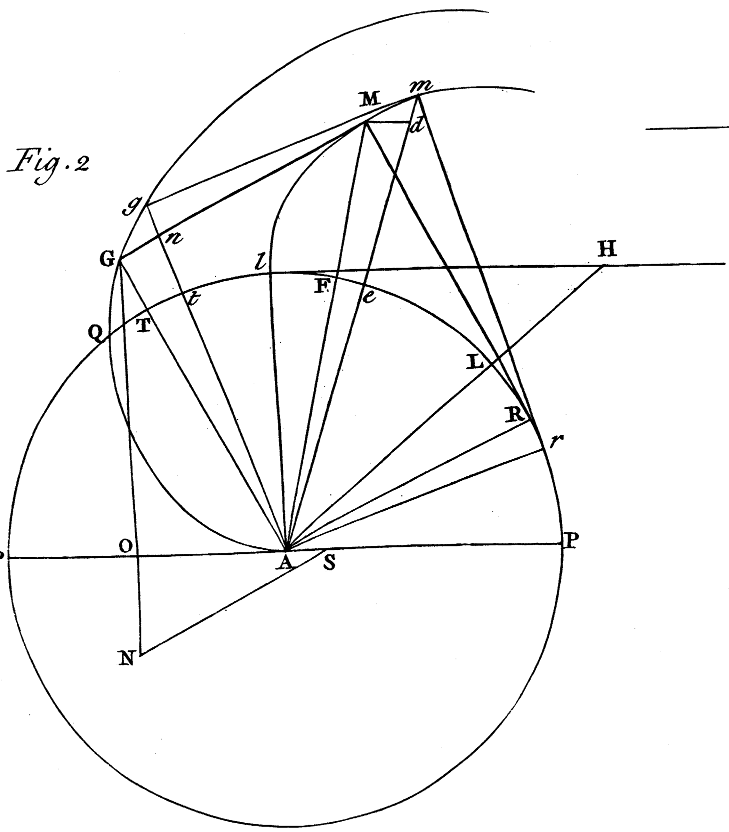
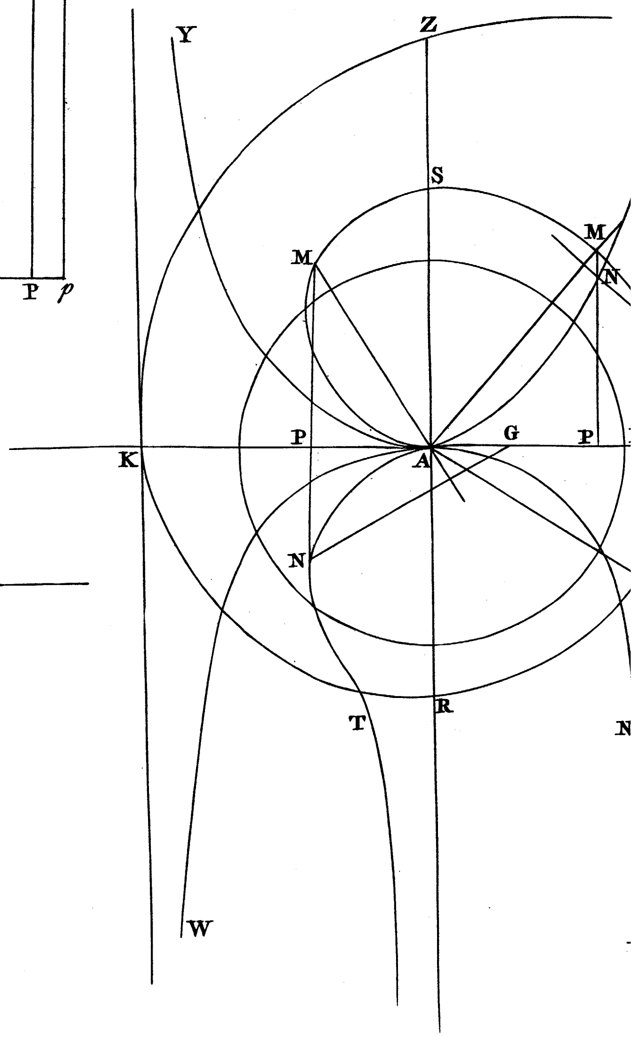
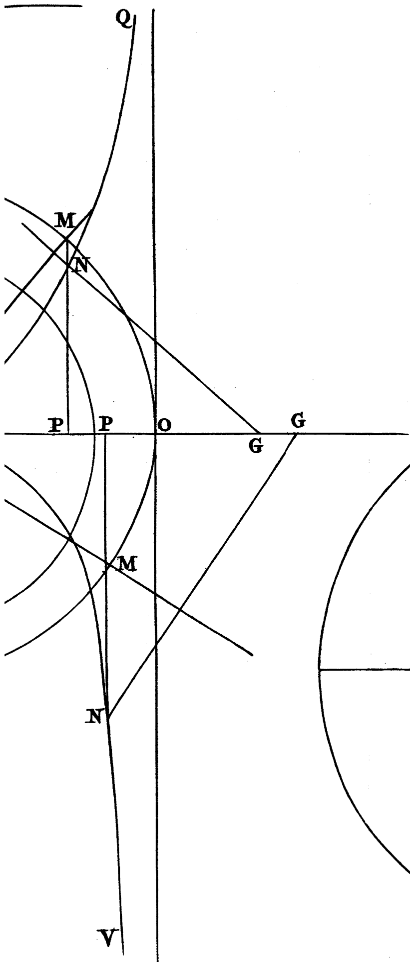


Fig. 3.





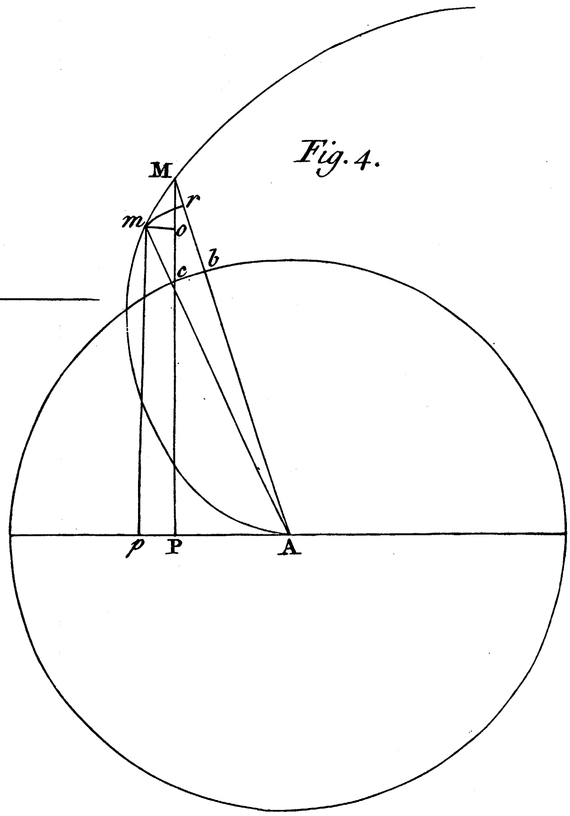


Fig. 4.

At propter similia triangula Msm, TGA, erit $Mm : Ms :: TA : TG$. seu $\sqrt{dx^2 + dy^2} : dx :: \frac{ydx - xdy}{dy} : \frac{y\sqrt{dx^2 + ay^2}}{dy} - a$; unde facta extremorum mediorumque multiplicatione, erit $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = ydy + xdx$, seu $x = -\frac{ydy}{dx} + \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

Fac autem pro separatione indeterminatarum $x = \int \frac{tdy}{a}$, & consequenter $dx = \frac{tdy}{a}$, tumque hos valores pro x, & dx substitue in data æquatione. Habebis $\int \frac{tdy}{a} = -\frac{ay}{t} + \frac{a\sqrt{t^2 + a^2}}{t}$, & facta differentiatione, erit $\frac{tdy}{a} + \frac{ady}{t} - \frac{aydt}{tt} = \frac{-a^3 dt}{t^2 . \overline{a^2 + t^2}.^{\frac{1}{2}}}$ seu $\frac{dy}{y} - \frac{a^2 dt}{t . \overline{a^2 + t^2}} = \frac{-a^4 dt}{ty . \overline{a^2 + t^2}^{\frac{3}{2}}}$.

Cum porro ex nota Bernoulii methodo sit $\frac{a^2 dt}{t . \overline{a^2 + t^2}} = \frac{dt}{t} - \frac{tdt}{t^2 + a^2}$, pone claritatis gratia hasce logarithmicas quantitates $= \frac{dn}{n}$. Hinc habebis $\frac{dy}{y} - \frac{dn}{n} = \frac{-a^4 dt}{ty . \overline{a^2 + t^2}^{\frac{3}{2}}}$. Positis autem $\frac{dy}{y} - \frac{dn}{n} = \frac{dp}{p}$, atque ideo $\frac{y}{n} = \frac{p}{a}$, seu $y = \frac{np}{a}$, & facta harum quantitatum substitutione, obtinebis $\frac{dp}{p} = \frac{-a^5 dt}{npt . \overline{a^2 + t^2}^{\frac{3}{2}}}$, seu $dp = \frac{-a^4 dt}{t^2 \times \overline{t^2 + a^2}}$; posito videlicet jam primum $n = \frac{at}{\sqrt{t^2 + a^2}}$ ex quo sequitur $dp - \frac{a^2 dt}{t^2} + \frac{a^2 dt}{a^2 + t^2}$.

Sed quia conſtituimus ſuperius $x = \int \frac{tdy}{a}$, & $y = \frac{np}{a}$; ſi in hiſce valoribus coordinatarum x & y ſubſtituas æquivalentes valores expreſſos dumtaxat per t, & dt, habebis demum

$$x = \int \overline{\frac{at\,dt}{\overline{t^2 + a^2}|^{\frac{3}{2}}} \times \int \frac{a^2 dt}{t^2 + a^2}}$$

$$\& \; y = \frac{t}{\overline{a^2 + t^2}|^{\frac{1}{2}}} \times \overline{\frac{a^2}{t} + \int \frac{a^2 dt}{t^2 + a^2}}.$$

Qui vero hujuſmodi formulas ad conſtructionem revocare ſtatuerit, intelliget ille quidem infinitis dumtaxat curvis problema noſtrum plane exhauriri poſſe. *At quis non dixerit $\int \overline{\frac{at\,dt}{\overline{t^2 + a^2}|^{\frac{3}{2}}} \times \int \frac{a^2 dt}{t^2 + a^2}}$, exigere conſtanti lege in quolibet caſu quadraturam mechanicæ cujuſdam curvæ, quæ ipſa primum a mechanica circuli quadratura dependeat? Primo certe hujuſce formulæ adſpectu nemo non judicaverit problema noſtrum hypermechanicum fore; maxime vero cum nulla directa methodo, quantum mihi conſtat, compertum ſit, hujuſmodi formulas revocari poſſe ad alias, quæ a ſola circuli quadratura dependeant. Quapropter in illa ego opinione adhuc eſſem, ut ſolæ hypermechanicæ curvæ aptæ forent ſatisfaciendo problemati noſtro, ſi quæſitam curvam ab axe non traduxiſſem ad focum; ex quo illico certior factus ſum, quæſtiones hujuſmodi,

* Fluens $\int \overline{\frac{at\,dt}{\overline{t^2 + a^2}|^{\frac{3}{2}}} \times \int \frac{a^2\,dt}{t^2 + a^2}}$ a ſola circuli quadraturâ pendet & hæc eſt $\frac{at}{\overline{a^2 + t^2}|^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{\overline{a^2 + t^2}|^{\frac{1}{2}}} \times \int \frac{a^2\,dt}{a^2 + t^2}$ (arc circuli, cujus radius eſt a & tangent t.) E. W.

quas

quas ab initio dixeris implicatissimas, seu pene inextricabiles, sola tandem circuli quadratura expediri feliciter posse. Quo autem modo id factum a nobis fuerit brevi expono.

FIGURA SECUNDA.

Referatur * quæsita curva IMm ad focum A, ex quo ductis duabus ordinatis AM, Am minimum angulum continentibus, centro A, radio AM describatur infinitesimus arcus Md, tum vocetur AM $= z$, M$d = dx$, M$m = ds$; ductaque tangente MG, atque in ipsam ex puncto A perpendiculari AG, fiat intercepta MG $= a$, unde perpendicularis AG erit $= \sqrt{z^2 - a^2}$.

Propter similia triangula AMG, Mdm erit Mm : md : : MA : MG; seu $ds : dz : : z : a$. ergo $zdz = ads$. & integrando $Aa + as = \frac{z^2}{2}$. Constat itaque curvam quæsitam esse rectificabilem, estque A quantitas addenda, si opus fuerit, æquationi complendæ, quam A deinceps determinabimus.

Erigatur interea æquatio differentialis ad quadratum, & orietur $z^2dz^2 = a^2ds^2 = a^2dz^2 + a^2dx^2$, ob triangulum M$dm$ infinitesimum rectangulum in d. Hanc ergo habebis $\overline{z^2 - a^2}.dz^2 = a^2dx^2$; sive $dz\sqrt{z^2 - a^2} = adx$, quæ est æquatio quæsitæ curvæ relatæ hoc modo ad focum A.

Multiplicetur hæc ultima æquatio per $\frac{z}{2a}$; fiet $\frac{zdz}{2a}\sqrt{zz - aa} = \frac{zdx}{2}$. Integretur; habebis aB +

* Hujus curvæ arcum, longitudinem, evolutam & radium curvaturæ jamdudum invenit Simpson; consulas enim pagin. 151 & 163 in tractatu suo de fluxionibus. E. W.

$\frac{\overline{zz - aa}\sqrt{zz - aa}}{2.3.a} = \int \frac{zdx}{2}$. Cum autem $\frac{zdx}{2}$ ſit elementum areæ, patens eſt curvam eſſe quadrabilem. B eſt quantitas addenda, ſi opus ea fuerit, in integratione.

Ut vero redigatur æquatio ſuperius inventa ad arcum radii conſtantis, abſcinde AE $= a$, & deſcribe arcum minimum Ee, quem voca $= du$. Habebis $z : a :: dx : du$. ergo $dx = \frac{zdu}{a}$; quo valore ſubſtituto in ſuperiori æquatione $dz\sqrt{z^2 - a^2} = adx$, hæc mutabitur in iſtam $\frac{dz}{z}\sqrt{z^2 - a^2} = du$, in qua inſunt variabiles ſeparatæ.

Ut primum membrum ad formulas magis cognitas reducatur, ita æquationem diſpono $\frac{zdz\sqrt{z^2 - a^2}}{zz} = du$; tum conſtituo AG $= \sqrt{z^2 - a^2} = t$, factaque ſubſtitutione, orietur $\frac{t^2dt}{t^2 + a^2} = dt - \frac{a^2dt}{t^2 + a^2} = du$. Formula $\frac{a^2dt}{t^2 + a^2}$ ut conſtat, eſt elementum arcus circularis, cujus radius $= a$, tangens $= t$.

Ultima igitur hæc æquatio ad conſtructionem perducit, quæ circuli quadraturam ſupponit. Centro itaque A, radio AI $= a$, deſcribatur circulus ILP, cui ſit tangens indefinita IK. Sumatur in hac tangente quælibet IH $= t$, & agatur ſecans AH $= z$; ſume præterea differentiam inter tangentem IH, & ejus arcum IL, quæ erit $= u$; tandem accipe arcum IL huic differentiæ æqualem, & per punctum E duc AM $=$ AH, punctum M erit in curva quæſita.

Ex

Ex hac constructione facile colligitur curvam nostram incipere in puncto I, tum ad modum spiralis semper recedere a circulo, & infinitis circumvolutionibus illum ambire. In puncto I curva tangitur a radio IA. Nullam addidi in mea construstione constantem, propterea quod constantis additio curvam non mutat. Nam IE vel sit æqualis u, vel $u+b$, vel tandem $u-b$, eadem prorsus curva enascitur.

Nunc vero sunt determinandæ constantes A & B, quæ additæ sunt in integratione, dum curvæ rectificationem, & quadraturam invenimus. Quoniam posito $s=o$, fit $z=a$, æquatio $\frac{z^2}{2}-Aa=as$, data hac hypothesi, in istam mutabitur $\frac{aa}{2}-Aa=o$, unde $A=\frac{a}{2}$; quapropter æquatio completa erit $\frac{zz-aa}{2a}=s$. Atqui $zz-aa=H$. ergo $\frac{H}{2a}=s$.

Quod spectat ad quadraturam, jam constat fore aream AIM $=o$, cum sit $z=$ radio, seu $=a$; ergo æquatio $aB+\frac{\overline{zz-aa}\sqrt{zz-aa}}{2\cdot 3\cdot a}=\int\frac{zdx}{2}$, evadit in hac hypothesi in istam $aB=o$: ergo æquatio completa est $\frac{\overline{zz-aa}\sqrt{zz-aa}}{2\cdot 3\cdot a}=\frac{t^3}{2\cdot 3\cdot a}=\int\frac{zdx}{2}$. Sed $\frac{t^2}{2a}=s$; ergo $\frac{ts}{3}=\int\frac{zdx}{2}$; ideoque spatium IAM est tertia pars rectanguli ex AG, seu IH, & ex curva IM.

Radium osculi hac ratione definiemus. Ducatur radius AR perpendicularis rectæ AG, & jungatur RM. Quoniam GM, AR æquales sunt, & parallelæ, GA, MR pariter æquales erunt, & parallelæ. Ergo

MR

MR perpendicularis radio AR tanget circulum, & perpendiculariter occurret curvæ Mm. Eodem prorſus modo ducto radio Ar normali rectæ Ag, linea mr erit tangens circuli, & normalis curvæ Mm. Igitur curva IMm ea eſt quæ naſcitur ex evolutione circuli, & recta MR = AG æquabit arcum circularem IR.

Quoniam vero RM=AG=IH, & IH ex conſtructione æquat duos arcus circulares IE, IL, arcus IR æquabit duos arcus IE, IL, & dempto communi IL, remanebit arcus IE = LR.

Infiniteſimus ſector RMm, qui eſt elementum areæ REIM æqualis eſt $\frac{tds}{2}$. Sed $ds = \frac{zdz}{a} = \frac{tdt}{a}$. ergo RM$m = \frac{t^2dt}{2a}$. Et integrando area REIM $= \frac{t^3}{2.3.a}$. Sed etiam area IAM ſuprà inventa eſt æqualis $\frac{t^3}{2.3.a}$, ergo area REIM = IAM. Et ablato ſpatio communi IEM, remanet ſector IAE = MER. Addito autem ſectore EAR fit ſector IAR = triangulo AMR, quod apprime cum veritate conſentit; nam cum arcus IR = RM, conſtat ſectorem IAR æquare triangulum ARM.

Curva tranſiens per omnia puncta G.g. erit baſis, ex qua gignitur tractoria IMm. Quænam ſit hæc curva breviter videamus. Quoniam GAn, & MRm ſunt ſectores ſimiles, & AG = RM, erit Gn = Mm $= ds$. Ergo æquatio $ads = tdt$, erit æquatio curvæ quæſitæ, exiſtente ordinata AG$=t$, G$n = ds$. Ut autem æquatio reducatur ad arcum radii conſtantis, vocetur T$t = dw$; erit $t : a :: ds : dw$. Ergo $ads = tdw$.

Ergo

Ergo $tdt = tdw$, five $dw = dt$, five tandem $Tt = gn$, quæ eſt æquatio ſpiralis Archimedeæ, cujus conſtructio ita peragitur.

Age radium AP, perpendicularem radio AI, & ſumatur arcus PQ æqualis radio; tum polo A, deſcribatur ſpiralis Achimedea tranſiens per punctum Q; hæc ipſa erit baſis, ex qua deſcribitur tractoria IM prædita tangente conſtanti $GM = a$.

Interea hæc habe: ſpiralis Archimedea eſt ea curva, a qua tamquam baſi noſtra generatur tractoria IMm. Nunc ſupereſt animadvertere, quod ſi in illa formula, quam vir clariſſ. Vincentius Riccatus methodo motus tractorii conſtruxit in ſuo commentario de uſu hujus motus in æquationum differentialium conſtructione (ubi hanc methodum illuſtravit penituſque abſolvit) ſi, inquam, in illa formula ſupponas x & y eſſe coordinatas ſpiralis Archimedeæ, & y datas eſſe per x, quamquam indeterminatæ ſeparari omnino nequeant, ſuſcipiet dicta formula ex infinitis, quarum eſt capax, unam quoque conſtructionem dependenter a noſtra curva. Ea ex quatuor Riccatianis ibidem expoſitis formulis, quæ hypotheſi noſtræ convenit prima eſt, nimirum,

$$\frac{abdz}{\sqrt{bb+qq}} + qdx = bdy.$$

Facta ergo, ut dixi, ſuppoſitione, ejus x & y eſſe coordinatas ſpiralis Archimedeæ, ſi infinita puncta N conſtruendæ curvæ tuto invenire cupias, exigit illa methodus, ut deſcripta tractoria IMm ope fili, ſeu tangentis conſtantis $GM = a$, facto jam motu aG verſus Q, tumque ſumpta in axe quacumque conſtanti $OS = b$, ſemper ad eandem partem, ſi per punctum S. ducas

ducas parallelam tangenti GM, donec occurrat ordinatæ $OG = y$ in puncto N, hocce punctum, ut ibi demonstratur, est semper in quæsita curva. Atqui vidimus supra rectam RA parallelam tangenti GM hujus nostræ tractoriæ IMm fore perpendicularem radio AG spiralis Archimedeæ AQG.

Figura Tertia.

Ergo ut habeas infinita puncta N.N. construendæ curvæ, sufficit quod sumas semper in axe constantes PG, $PG = b$ ad eandem plagam, tumque a punctis G, G ducas in radios spiralis AM, AM productos, si oporteat, normales GN, GN, donec occurrant ordinatis PM, PM in N.N. Hoc modo obtinebis per infinita puncta curvam hac methodo describendam. Invenies itaque hujusmodi curvæ ramum genitum a spiralis arcu AMS esse ANT; ab altero vero spiralis arcu SMO esse ANQ; a tertio OMR esse ANV; a quarto RK esse AY; a quinto denique KZ esse AW, & sic in infinitum assymptoticos omnes; ex quo propterea vides integram curvam, quæ nostræ formulæ constructionem suppeditat in hac videlicet peculiari tractoria abdita ramis numero infinitis gaudere, ac eorum quemlibet votis satisfacere recte posse.

Sed quia ad obtinendam dictæ formulæ constructionem opus maxime est ut abscissæ x sint in axe, earum vero ordinatæ y sint omnes inter se parallelæ (nostræ autem y hic sunt ad focum) ac propterea oportet ut eædem y datæ sint per x, vel postea separari indeterminatæ possint, vel non, nunc ergo ut hisce conditionibus

onibus compleam, ſatis mihi erit invenire æquationem ſpiralis Archimedeæ relatæ ad axem, quod ſic aſſequor.

FIGURA QUARTA.

Sit ſpiralis Archimedea AmM, ejus axis FAF, abſciſſa $AP = x$, ordinata PM ad angulum rectum $= y$, eique infinite proxima pm. Ducta mo parallela ad axem, erit, $mo = dx$, $oM = dy$. Sit propterea AM radius ſpiralis $= t$, cum quo Am faciat angulum infiniteſimum MAm, & centro A, radio AM, deſcripto circuli arcu mr, erit $Mr = dt$. Voca arcum $mr = ds$, & eodem centro A, radio quovis conſtanti $= a$, deſcribe circulum Fcb, & voca ejus arcum infiniteſimum $cb = du$.

Ex hac præparatione erit primò $\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2$, ſeu $t^2 = x^2 + y^2$, & $t = \sqrt{x^2 + y^2}$; unde $dt = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Præterea habebis $\overline{Mr}^2 + \overline{rm}^2 = \overline{Mm}^2$ ſeu $dt^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$. Sed ex ſimilitudine Sectorum Acb, Amr, eſt $Ac : cb :: Am : mr$; ſeu $a : dt :: t : ds$. & ex æquatione ſpiralis Archimedeæ ad focum habes $cb = Mr$, ſeu $du = dt$; unde erit $ds = \frac{tdt}{a}$. Ergo factis opportune ſubſtitutionibus in altera ſuperiori æquatione, obtinebis $dt^2 + \frac{t^2dt^2}{a^2} = dx^2 + dy^2$, ſeu tandem

$\overline{a^2 + x^2 + y^2} \times \frac{\overline{\overline{xdx + ydy}}^2}{x^2 + y^2} = a^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}$. vel potius

$$dy^2 + \overline{2dxdy} \times \frac{\overline{a^2xy + x^3y + xy^3}}{x^2y^2 + y^4 - a^2x^2} + \overline{dx}^2 \times \frac{\overline{x^4 + x^2y^2 - a^2y^2}}{x^2y^2 + y^4 - a^2x^2} = 0$$

unde completo quadrato, & facta radicis extractione, erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\overline{xy} \times \overline{a^2 + x^2 + y^2} \pm a \times \overline{x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}}}{x^2y^2 + y^4 - a^2x^2}.$$

Ecce itaque ſpiralis Archimedeæ æquationem relatæ ad axem, ut optabamus, in qua y datur per x. * Quamquam vero in hujuſmodi æquatione, indeterminatæ ſeparari nullo artificio poſſint, vides tamen præſidiis pure mechanicis ad conſtructionem nos feliciter perveniſſe, quod, attento illius ſummatoriæ adſpectu, quam initio obtinuimus, cum curvam noſtram ad axem referre placuit, impoſſibile videbatur.

Scio ego quidem conſtructionem hancce, quæ a ſola circuli quadratura dependet, non penitus exhaurire ſupradictam Riccatianam formulam, quippe quæ conſtrui etiam poteſt, quacumque alia propoſita tractoria, cujus baſis ſit dicta ſpiralis Archimedea, ejuſque tangens recta quævis linea conſtans; ſed inter infinitas haſce conſtructiones noſtra quidem maximum locum habet, ut quæ cæteris ſimplicior, nec minus vera.

Porro antequam finem facio, unum addam. Laudatus Mathematicus in capite ſecundo ſui commentarii oſtendit, quod ubi in conſtructione ſuæ formulæ tractoriam circuli adhibeat, tunc in infinitas occurrit tranſcendentes curvas, quæ ſimul exhaurire valent

* Ad hunc modum indeterminatæ ſeparari poſſunt; ſubſtituatur pro $x = \frac{z}{a} \times \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$, & pro $y = \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a} \times \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$, & ſit. E. W.

propoſitam

propoſitam formulam. Sed (quod ei merito quidem in pretio eſt) in infinita harum curvarum familia unam inſuper latentem detegit algebraicam quarti gradus, quæ commodè ejuſdem formulæ conſtructionem ſuppeditat, rectèque perficit. Nos in re fortaſſe difficiliori non diſſimile exemplum hic attulimus. Vidimus enim problema noſtrum, quod per tractoriam ſpiralis Archimedeæ generatim conſtruitur, expoſcere & ipſum ad ſui conſtructionem curvas numero infinitas, ſed quod moleſtius videtur, magiſque operoſum, hujuſmodi eſſe haſce curvas, ut niſi hypermechanico labore poſſimus aſſequi. Veruntamen in infinito harum agmine facile & nobis fuit oſtendere unam præterea curvam abſcondi, quam illico aſſequaris dependenter a ſola quadratura circuli, ideoque attenta rei difficultate, multo ſimpliciori modo, quàm initio ſperare licuiſſet. Noverim certe curvam hanc noſtram non plene exhaurire datam formulam, ſed infici nequit, ejuſdem exhibere nullo fere negotio rectiſſimam, maximeque ſimplicem conſtructionem, quod ſatis eſt, aliiſque planiorem viam oſtendere, qua facilius enodare poſſint hujuſce generis quæſtiones inextricabiles primo intuitu, nec vero labore vacuas. Hoc itaque inventum credidimus non contemnendum fore, præſertim cum aliæ methodi uſque adeo notæ, quovis verſatæ ſtudio, minime quantum nobis conſtat, ad id commodum perducere valeant.

Romæ prid. Non. Aprilis, 1766.

Pius Fantonus,

Philoſophus & Mathematicus Bononienſis.

Fig. 1.

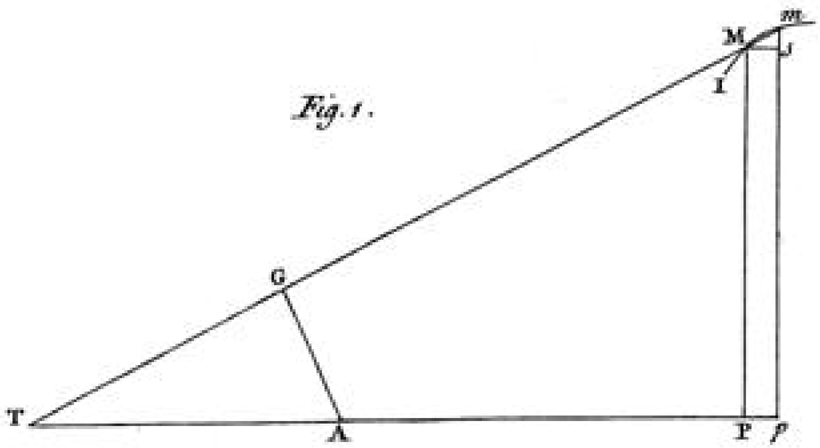


Fig. 2

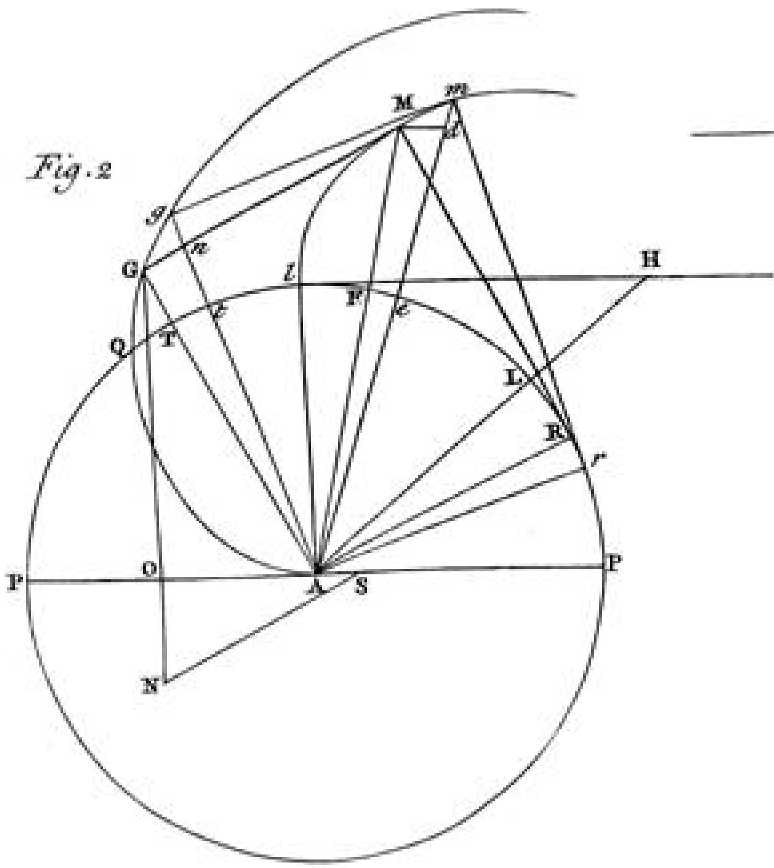


Fig. 3.

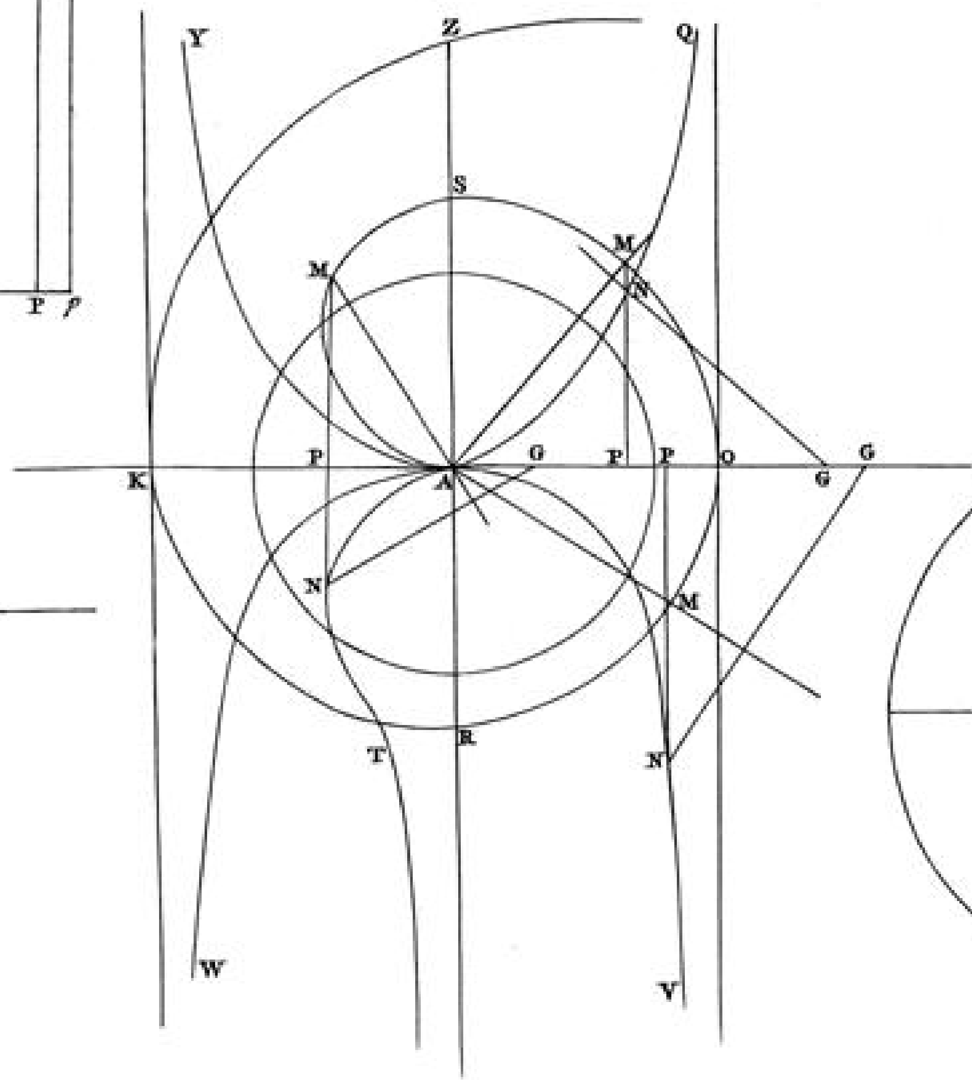


Fig. 4.